

## Teorema della funzione inversa. Una dimostrazione in dimensione due

UNA VERSIONE PIÙ GENERALE DEL TEOREMA DI DINI

**Teorema 1.** Sia  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$  e tale che

$$F(0,0) = 0 \quad e \quad \partial_x F(0,0) \neq 0.$$

Allora esistono  $L > 0$ ,  $B > 0$ ,  $A > 0$  ed una funzione

$$\eta : [-L, L] \times [-B, B] \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

(i) Per ogni  $\ell \in [-L, L]$  e per ogni punto  $(x, y) \in [-A, A] \times [-B, B]$ , si ha che

$$F(x, y) = \ell \quad \text{se e solo se} \quad x = \eta(\ell, y).$$

(ii) La funzione di due variabili  $\eta$  è:

- continua su  $[-L, L] \times [-B, B]$ ;
- differenziabile e di classe  $C^1$  su  $(-L, L) \times (-B, B)$ .

**Osservazione:** Consideriamo gli insiemi

$$\Omega := \left\{ (x, y) : y \in (-B, B), \eta(-L, y) < x < \eta(L, y) \right\},$$

$$\mathcal{R} = (-L, L) \times (-B, B).$$

La mappa

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{R}_1, \quad \Phi(x, y) = (F(x, y), y),$$

è un diffeomorfismo tra  $\Omega$  e  $\mathcal{R}$ . La sua inversa è la mappa

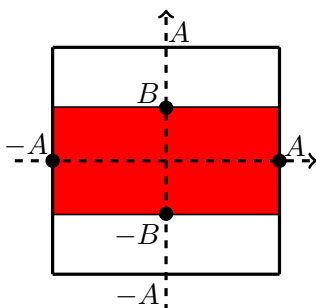
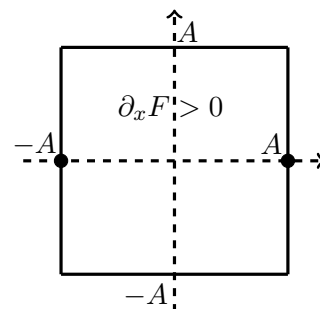
$$\Psi : \mathcal{R} \rightarrow \Omega, \quad \Psi(\ell, y) = (\eta(\ell, y), y).$$

**Dimostrazione:**

- **Costruzione di  $\eta$ .**

Scegliamo prima  $A > 0$  in modo tale che

$$\partial_x F(x, y) > 0 \quad \text{per ogni} \quad (x, y) \in [-A, A] \times [-A, A].$$



Siccome  $F(0,0) = 0$  e la funzione  $x \mapsto F(x,0)$  è crescente, abbiamo che

$$F(A,0) > 0 \quad e \quad F(-A,0) < 0.$$

Per la continuità di  $F$ , esiste  $B \in (0, A)$  tale che

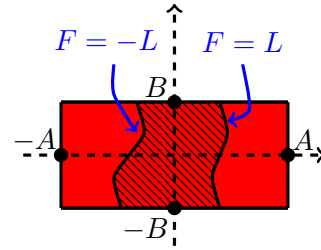
$$F(A, y) > 0 \quad \text{per ogni} \quad y \in [-B, B];$$

$$F(-A, y) < 0 \quad \text{per ogni} \quad y \in [-B, B].$$

Definiamo  $L > 0$  come il più piccolo fra

$$\frac{1}{2} \min_{y \in [-B, B]} F(A, y) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \min_{y \in [-B, B]} |F(-A, y)|.$$

Osserviamo che, fissati  $\ell \in [-L, L]$  e  $y \in [-B, B]$ , esiste un unico  $x \in [-A, A]$  tale che  $F(x, y) = \ell$ . Questo  $x$  sarà per definizione  $\eta(\ell, y)$ . Quindi, per costruzione,  $F(\eta(\ell, y), y) = \ell$ .



- **Continuità di  $\eta$ .** Siano  $\ell_n \in [-L, L]$  e  $y_n \in [-B, B]$  due successioni convergenti, con limiti

$$\ell_\infty \in [-L, L] \quad \text{e} \quad y_\infty \in [-B, B].$$

Inoltre, siccome la successione  $\eta(\ell_n, y_n)$  è limitata, a meno di estrarre una sottosuccessione, possiamo supporre che  $\eta(\ell_n, y_n)$  è convergente. Definiamo quindi

$$\eta_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta(\ell_n, y_n).$$

Per definizione di  $\eta$ , abbiamo che

$$F(\eta(\ell_n, y_n), y_n) = \ell_n.$$

Usando la continuità di  $F$ , abbiamo che

$$F(\eta_\infty, y_\infty) = \ell_\infty.$$

Per definizione quindi abbiamo che

$$\eta_\infty = \eta(\ell_\infty, y_\infty),$$

il che dimostra la continuità di  $\eta$ .

- **Derivabilità di  $\eta$  nella variabile  $\ell$ .** Fissiamo

$$\ell \in (-L, L) \quad \text{e} \quad y \in (-B, B).$$

Allora, abbiamo che per ogni  $\delta$  di modulo abbastanza piccolo si ha

$$F(\eta(\ell + \delta, y), y) = \ell + \delta.$$

Usando la differenziabilità di  $F$  e la continuità di  $\eta$ , abbiamo che esiste una funzione  $E$  tale che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{E(t)}{t} = 0$$

e

$$\begin{aligned} \delta &= F(\eta(\ell + \delta, y), y) - F(\eta(\ell, y), y) \\ &= \left( \eta(\ell + \delta, y) - \eta(\ell, y) \right) \partial_x F(\eta(\ell, y), y) + E(\eta(\ell + \delta, y) - \eta(\ell, y)). \end{aligned}$$

Dividendo per  $\delta$ , abbiamo che

$$1 = \left( \partial_x F(\eta(\ell, y), y) + \frac{E(\eta(\ell + \delta, y) - \eta(\ell, y))}{\eta(\ell + \delta, y) - \eta(\ell, y)} \right) \frac{\eta(\ell + \delta, y) - \eta(\ell, y)}{\delta}.$$

Di conseguenza esiste

$$\partial_\ell \eta(\ell, y) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\eta(\ell + \delta, y) - \eta(\ell, y)}{\delta} = \frac{1}{\partial_x F(\eta(\ell, y), y)}.$$

- **Derivabilità di  $\eta$  nella variabile  $y$ .** Come nel teorema della funzione implicita abbiamo che  $\eta$  è derivabile nella seconda variabile e

$$\partial_y \eta(\ell, y) = - \frac{\partial_y F(\eta(\ell, y), y)}{\partial_x F(\eta(\ell, y), y)}.$$

- **Differenziabilità di  $\eta$ .** Siccome le derivate parziali di  $\eta$  sono continue, abbiamo che  $\eta$  è differenziabile in ogni punto  $(\ell, y)$  di  $(-L, L) \times (-B, B)$ .  $\square$

TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA

**Teorema 2** (Teorema della funzione inversa). *Sia*

$$\Phi = (F, G) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

una funzione di classe  $C^1$  e tale che

$$\Phi(0,0) = (0,0) \quad e \quad \det \begin{pmatrix} \partial_x F(0,0) & \partial_y F(0,0) \\ \partial_x G(0,0) & \partial_y G(0,0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Allora esistono:

- un intorno aperto  $\Omega$  di  $(0,0)$ ;
- un rettangolo  $\mathcal{R} = (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta)$  ;
- una funzione  $\Psi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ;

tali che:

- (i) La mappa  $\Psi$  è di classe  $C^1$  su  $\mathcal{R}$
- (ii) La mappa  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$  è bigettiva e  $\Psi : \mathcal{R} \rightarrow \Omega$  è la sua inversa.

**Dimostrazione.** Dimostriamo il teorema supponendo che

$$\partial_x F(0,0) > 0 \quad e \quad \det \begin{pmatrix} \partial_x F(0,0) & \partial_y F(0,0) \\ \partial_x G(0,0) & \partial_y G(0,0) \end{pmatrix} > 0.$$

Sia  $A > 0$  tale che

$$\partial_x F > 0 \quad e \quad \det \begin{pmatrix} \partial_x F & \partial_y F \\ \partial_x G & \partial_y G \end{pmatrix} > 0 \quad \text{in} \quad [-A, A] \times [-A, A].$$

Usando il teorema precedente, esistono  $L > 0, B > 0$  ed una funzione

$$\eta : (-L, L) \times (-B, B) \rightarrow \mathbb{R}$$

Consideriamo gli insiemi

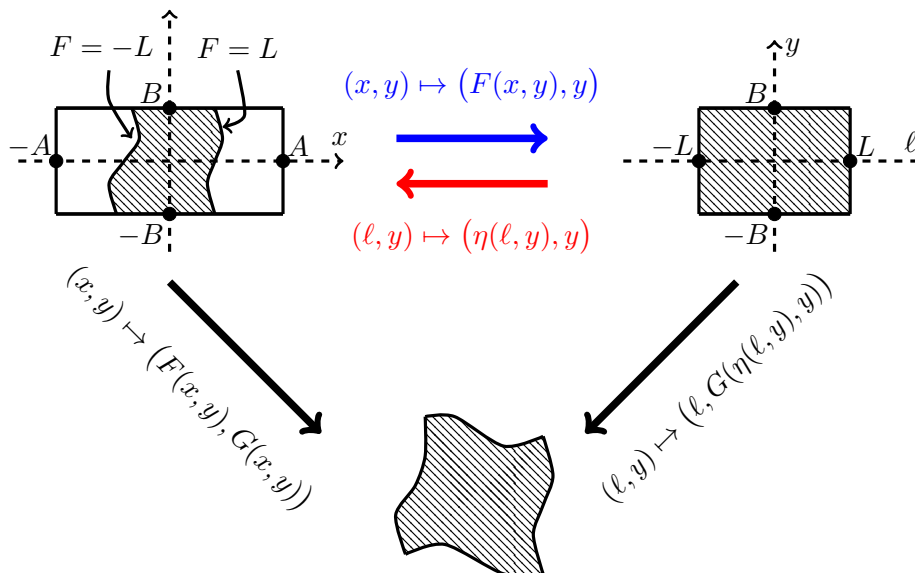
$$\Omega_1 := \left\{ (x, y) : y \in (-B, B), \eta(-L, y) < x < \eta(L, y) \right\}.$$

e  $\mathcal{R}_1 = (-L, L) \times (-B, B)$  e la mappa

$$\Phi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathcal{R}_1, \quad \Phi_1(x, y) = (F(x, y), y).$$

Allora, la mappa  $\Phi_1$  è un diffeomorfismo e la sua inversa è data da

$$\Psi_1 : \mathcal{R}_1 \rightarrow \Omega_1, \quad \Psi_1(\ell, y) = (\eta(\ell, y), y).$$



Ora, osserviamo che

$$\partial_y [G(\eta(\ell, y), y)] = \partial_y \eta(\ell, y) \partial_x G(\eta(\ell, y), y) + \partial_y G(\eta(\ell, y), y).$$

Siccome,

$$F(\eta(\ell, y), y) = \ell,$$

derivando nella variabile  $y$ , abbiamo

$$\partial_y \eta(\ell, y) \partial_x F(\eta(\ell, y), y) + \partial_y F(\eta(\ell, y), y) = 0,$$

otteniamo

$$\partial_y [G(\eta(\ell, y), y)] = \frac{\partial_x F(\eta(\ell, y), y) \partial_y G(\eta(\ell, y), y) - \partial_y F(\eta(\ell, y), y) \partial_x G(\eta(\ell, y), y)}{\partial_x F(\eta(\ell, y), y)} > 0.$$

Applichiamo il Teorema 1 alla funzione

$$\Phi_2(\ell, y) = (\ell, G(\eta(\ell, y), y)),$$

definita per  $\ell \in (-L, L)$  e  $y \in (-B, B)$ . Esistono quindi  $K > 0$ ,  $a \in (0, L)$  ed una funzione

$$\mu : (-a, a) \times (-K, K) \rightarrow \mathbb{R},$$

tale che la mappa

$$\Phi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathcal{R}_2, \quad \Phi_2(\ell, y) = (\ell, G(\eta(\ell, y), y)).$$

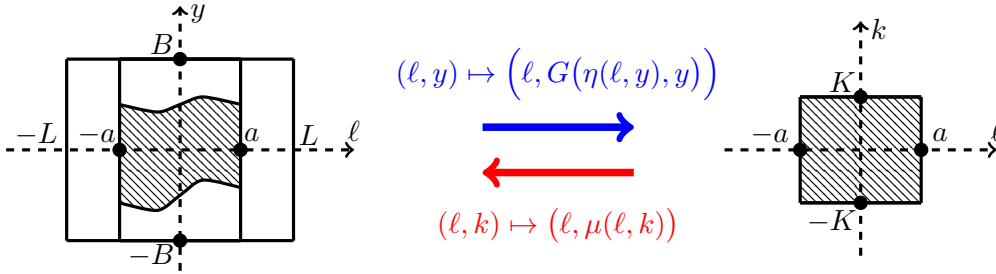
è un diffeomorfismo e la sua inversa è della forma da

$$\Psi_2 : \mathcal{R}_2 \rightarrow \Omega_2, \quad \Psi_2(\ell, k) = (\ell, \mu(\ell, k)),$$

dove

$$\mathcal{R}_2 := (-a, a) \times (-K, K),$$

$$\Omega_2 := \{(\ell, y) : \ell \in (-a, a); \mu(\ell, -K) < y < \mu(\ell, K)\} \subset \mathcal{R}_1.$$



Infine, la mappa

$$\Psi_1 \circ \Psi_2 : \mathcal{R}_2 \rightarrow \Psi_1(\Omega_2),$$

è l'inversa di

$$(F, G) : \Psi_1(\Omega_2) \rightarrow \mathcal{R}_2.$$

□

**Esempio 3.** La mappa

$$\Phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x > 0\}, \quad \Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

è bigettiva e di classe  $C^1$ , con inversa di classe  $C^1$ .

**Esempio 4.** La mappa

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \Phi(t, \theta) = (e^t \cos \theta, e^t \sin \theta)$$

è tale che

$$\det J\Phi > 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^2,$$

ma non è bigettiva.